

© А.А. ВАКУЛИН, А.Ф. НЯШИН

Тюменский государственный университет  
aavakulin@mail.ru

УДК 622.692

**ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА  
В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО**

**FLUID OUTFLOW FROM A RECTANGULAR CHANNEL  
IN A FLOODED SPACE**

*АННОТАЦИЯ.* Рассматривается процесс истечения жидкости из плоского полуограниченного канала в пространство, затопленное другой жидкостью, обусловленный различием плотностей. Полубесконечный горизонтальный канал конечной высоты заполнен одной жидкостью и полностью погружен в другую жидкость. Вследствие различия плотностей сред состояние равновесия невозможно. В начальный момент времени начинается движение. Тяжелая жидкость вторгается вглубь канала и вытесняет легкую. При смене ролей жидкостей тяжелая стекает через нижнюю часть входного сечения и замещается легкой. Необходимо описать распространение волны вытеснения в канале. Основная цель состоит в определении количественных оценок и качественных особенностей рассматриваемого процесса. Проведенное исследование дополняет решение задачи об утечке нефти при гильотинном разрыве подводного трубопровода. Построено автомодельное решение уравнений движения. Дано сравнение характеров истечения легкой и тяжелой жидкостей.

*SUMMARY.* The process of fluid outflow from a flat semi-infinite channel space, flooded with another fluid, caused by the difference of densities is considered. A semi-infinite horizontal channel of finite height is filled with fluid and fully immersed in any fluid. Equilibrium is impossible due to the difference in medium density. The flow begins at the start time. Heavy fluid invades the channel and removes the light one. When changing the roles, heavy fluids flow through the bottom of the inlet section and are replaced by light ones. It is necessary to describe the propagation of a repression wave in the channel. The main objective is to determine the quantitative estimates and qualitative features of the process. This study complements the solution of the problem of oil spills in the guillotine rupture of submarine pipeline. A self-similar solution of the equations of motion is built. The comparison of the nature of light and heavy fluids outflow is presented.

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.* Истечение, жидкость, автомодельное решение.

*KEY WORDS.* Outflow, fluid, self-similar solution.

### 1. Математическая постановка задачи.

Данная работа дополняет исследование, проведенное в [1], где рассматривалась утечка нефти при гильотинном разрыве подводного трубопровода [2-6]. Схематическое представление задачи дано на рис. 1.

#### Допущения:

- течение ламинарное с четкой границей раздела жидкостей;
- капиллярные эффекты не учитываются;
- модель течения квазиодномерная;
- длина волны много больше высоты канала.

**Обозначения:**  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $\mu$  — давление, плотность, скорость, динамическая вязкость жидкости;  $h_1$ ,  $h_2$  — высота слоев жидкостей, индексы 1 и 2 относятся соответственно к легкой и тяжелой средам;  $a$  и  $h$  — ширина и высота канала ( $a \ll h$ );  $g$  — ускорение свободного падения.

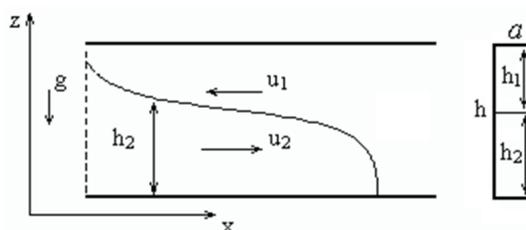


Рис. 1. Схематическое представление задачи.

Пунктиром показано первоначальное положение границы раздела сред

**Модель течения.** Для усредненной по ширине канала скорости жидкостей имеем следующее общее выражение [7-10]

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{a^2}{12\mu} (\rho \vec{g} - \text{grad} p)$$

Уравнение импульсов в проекциях для первой (легкой) жидкости в принятом приближении принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_1 g, \quad (1.1)$$

$$u_1 = -\frac{a^2}{12\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.2)$$

Из уравнений (1.1)-(1.2) находим

$$\frac{12\mu_1}{a^2} u_1 + \frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_1 g \frac{\partial z_f}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

где  $p_f$  — давление на границе раздела жидкостей,  $z_f$  — координата точек границы раздела. Аналогично для второй (тяжелой) жидкости

$$\frac{12\mu_2}{a^2} u_2 + \frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_2 g \frac{\partial z_f}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

В дальнейшем положим  $\partial z_f / \partial x = \partial h_2 / \partial x$ . Вычитая из (1.4) уравнение (1.3) получим следующее основное уравнение совместного движения:

$$(\rho_2 - \rho_1)g \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{12}{a^2}(\mu_2 u_2 - \mu_1 u_1) = 0 \quad (1.5)$$

Условия неразрывности обоих потоков:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

Связь геометрических параметров:

$$h_1 + h_2 = h \quad (1.8)$$

При свободном истечении имеет место интеграл:

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 = 0.$$

Система уравнений движения (1.5)-(1.8) дополняется заданием краевых условий. На срезе канала:  $h_2 = h_0$  при  $x = 0$ ; на носике волны:  $h_2 = 0$  при  $x = L(t)$ , если вытекает легкая жидкость и  $h_2 = h$  при  $x = L(t)$ , если вытекает тяжелая жидкость. В данной задаче потребуем максимальной скорости вытеснения жидкости.

## 2. Автомоделное движение.

Будем искать решение уравнений (1.5)-(1.10) в виде:

$$\begin{aligned} h_1(x, t) &= t^n H^* H_1(\xi), & h_2(x, t) &= t^n H^* H_2(\xi), \\ u_1(x, t) &= t^k U^* U_1(\xi), & u_2(x, t) &= t^k U^* U_2(\xi), & \xi &= \frac{x}{E^* t^m}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь:  $H_1, H_2, U_1, U_2$  — безразмерные функции автомоделной переменной  $\xi$ ;  $H^*, U^*, E^*$  — размерные постоянные.

Подставляя решение в виде (2.1) в уравнения (1.5)-(1.8), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно автомоделной переменной  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{dH_2}{d\xi} + \bar{\mu} U_2 - U_1 &= 0, \\ nH_1 - m\xi \frac{dH_1}{d\xi} + H_1 \frac{dU_1}{d\xi} + U_1 \frac{dH_1}{d\xi} &= 0, \\ nH_2 - m\xi \frac{dH_2}{d\xi} + H_2 \frac{dU_2}{d\xi} + U_2 \frac{dH_2}{d\xi} &= 0, \\ H_1 + H_2 &= 1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\bar{\mu}$  — «безразмерная вязкость» определяемая равенством

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1};$$

найдем значения безразмерных параметров

$$n = 0, \quad k = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2};$$

и размерных постоянных

$$H^* = h, \quad U^* = E^* = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)gha^2}{\mu_1}}.$$

Уравнения (2.2) имеют интеграл:

$$H_1 U_1 + H_2 U_2 = 0.$$

Система уравнений (2.2) дополняется краевыми условиями, соответствующими постановке задачи:

$\xi = 0$ :  $H_2 = H_0$ ;  $\xi = \xi_0$ :  $H_2 = 0$  — вытекает легкая жидкость,

$\xi = 0$ :  $H_2 = H_0$ ;  $\xi = \xi_0$ :  $H_2 = 1$  — вытекает тяжелая жидкость.

Здесь  $\xi_0$  — неопределенный параметр.

**Анализ расчетов.** Распределение безразмерных функций по длине канала ищем, решая численно краевую задачу. Решение существенно зависит от отношения динамических вязкостей жидкостей. В дальнейшем будем считать  $\mu_1/\mu_2 = 8.2$ . Пусть канал первоначально заполнен легкой жидкостью. Максимальная скорость вытеснения достигается, когда  $H_2 \rightarrow h$  при  $\xi \rightarrow 0$ . На рис. 2 показана форма и скорость волны вытеснения, распространяющейся в положительном направлении.

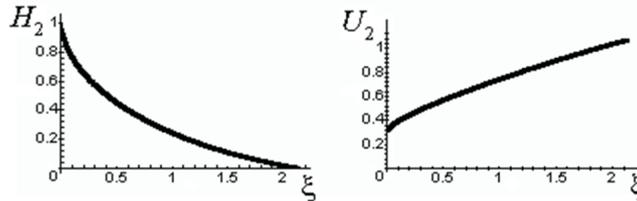


Рис. 2. Распределение безразмерных функций автомодельной переменной вдоль канала. Вытекает легкая жидкость

Доля и объем вытесненной жидкости определяются выражениями

$$\omega = \frac{1}{\xi_0} \int_0^{\xi_0} H_2(\xi) d\xi = \frac{1}{hL} \int_0^L h_2(x) dx.$$

$$V(t) = ah\omega L(t), \quad L(t) = \xi_0 U^* \sqrt{t}.$$

В приведенном примере:  $\xi_0 \approx 2.13$ ,  $\omega \approx 0.28$ . При увеличении отношения динамических вязкостей легкой и тяжелой сред доля вытеснения уменьшается.

Аналогично решается задача об истечении тяжелой жидкости в затопленное пространство (рис. 3). Скорость продвижения фронта волны в канале несколько

меньше:  $\zeta_0 \approx 1.45$ , доля вытесненной жидкости больше:  $\omega \approx 0.48$ . Объемный расход втекающих/вытекающих жидкостей в обоих случаях примерно одинаков.

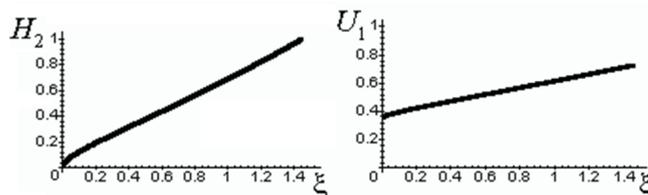


Рис. 3. Распределение безразмерных функций автомодельной переменной вдоль канала. Вытекает тяжелая жидкость

**Заключение.** При моделировании указанных процессов движения вязких сред выявлены следующие особенности. Увеличение отношения динамических вязкостей легкой и тяжелой сред ведет к уменьшению доли вытеснения. При смене ролей обеих жидкостей (истечение тяжелой жидкости) скорость волны уменьшается, а доля вытеснения увеличивается.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кутушев А.Г., Татосов А.В. Свободное истечение вязкой жидкости из трубы в затопленное пространство // Вестник Тюменского государственного университета. 2005. № 4. С. 82-86.
2. Kranenburg, C. Exchange flow of oil and sea-water in a ruptured submarine pipeline // Applied Ocean Research. 1984. Vol. 6. № 1. Pp. 23-30.
3. Kranenburg, C., Vegt, E. Leakage from ruptured submarine oil pipeline // Journal of Transportation Engineering. 1985. Vol. 111. № 5. Pp. 570-579.
4. Зоненко В.И., Ким Б.И., Минаев В.И. Моделирование утечки нефти при разрыве подводного трубопровода // Нефтепромышленное дело и транспорт нефти. 1985. № 11. С. 24-26.
5. Ишмухаметов И.Т., Исаев С.Л., Лурье М.В., Макаров С.П. Трубопроводный транспорт нефтепродуктов. М.: Нефть и газ, 1999. 565 с.
6. Вайншток С.М. Трубопроводный транспорт нефти. М.: Недра, 2002. 453 с.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 847 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 731 с.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1984. 529 с.
10. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. Ижевск, 2004. 768 с.

#### REFERENCES

1. Kutushev, A.G., Tatosov, A.V. Free flow of viscous fluid in the pipe in flooded space. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta — Tyumen State University Herald*. 2005. № 4. Pp. 82-86. (in Russian).
2. Kranenburg, C. Exchange flow of oil and sea-water in a ruptured submarine pipeline. *Applied Ocean Research*. 1984. Vol. 6. № 1. Pp. 23-30.
3. Kranenburg, C., Vegt, E. Leakage from ruptured submarine oil pipeline. *Journal of Transportation Engineering*. 1985. Vol. 111. № 5. Pp. 570-579.
4. Zonenko, V.I., Kim, B.I., Minaev, V.I. Simulation of oil spills in ruptured submarine pipeline. *Neftpromyslovoe delo i transport nefti — Petroleum Engineering and Transport of Oil*. 1985. № 11. Pp. 24-26. (in Russian).
5. Ishmukhametov, I.T., Isaev, S.L., Lur'e, M.V., Makarov, S.P. *Truboprovodnyi transport nefteproduktov* [Pipeline transportation of petroleum products]. Moscow, 1999. 565 p. (in Russian).

6. Vainshtok, S.M. *Truboprovodnyi transport nefi* [Pipeline crude oil transportation]. Moscow, 2002. 453 p. (in Russian).
7. Loitsianskii, L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow, 2003. 847 p. (in Russian).
8. Landau, L.D., Lifshits, E.M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow: Nauka, 1988. 731 p. (in Russian).
9. Sedov, L.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. T. 1* [Continuum mechanics. Vol. 1]. Moscow: Nauka, 1984. 529 p. (in Russian).
10. Betchelor, Dzh. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti* [An Introduction to Fluid Dynamics]. / Transl. fr. Eng. Izhevsk, 2004. 768 p.

#### **Авторы публикации**

**Вакулин Александр Анатольевич** — профессор кафедры механики многофазных систем Института физики и химии Тюменского государственного университета, доктор технических наук

**Няшин Анатолий Филоменович** — доцент кафедры математического моделирования Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, кандидат физико-математических наук

#### **Authors of the publication**

**Alexander A. Vakulin** — Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Multiphase Systems Mechanics, Institute of Physics and Chemistry, Tyumen State University

**Anatoly F. Nyashyn** — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University